第26卷 第6期 工 程 数 学 学 报 Vol. 26 No. 6
2009年12月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1005-16

二阶拟线性双曲型方程的精确边界能控性

庄凯丽， 尚培培

(复旦大学数学科学学院，上海 200433)

摘 要: 本文以二阶拟线性双曲型方程混合初边值问题的半整体 C^2 解理论为基础，针对一般的二阶拟线性双曲型方程的特征根在平衡态附近的不同分布情况，分别提出了相应的一般边界条件，并采用直接构造的方法，对特征根均不为零的情况，建立了完整的局部精确边界能控性理论；对一特征根为零的情况，对一类特殊的方程建立了其精确边界能控的充分必要条件，并分别对相应的控制时间给出了估计。

关键词: 二阶拟线性双曲型方程；混合初边值问题；半整体 C^2 解；精确边界能控性

分类号: **AMS**(2000) 35L70 **中图分类号**: O175.2 **文献标识码**: A

1 引言

关于线性波动方程的精确能控性已有大量结果[1,2]。对于拟线性双曲型方程目前的结果还不多，主要集中在一维的情况。李大潜等建立了自治情形下一阶拟线性双曲组及拟线性波动方程的精确边界能控性理论[3-6]。在此基础上，注意到能控性理论在非自治情况与自治情形有本质上的差别[5]，王志强给出了相应的非自治一阶拟线性双曲组及拟线性波动方程的精确边界能控性理论[7,8]。本文将利用类似方法对一般的二阶拟线性双曲型方程建立相应的精确边界能控性。

考虑下述二阶拟线性双曲型方程

$$u_{tt}+a(u,u_x,u_t)u_{tx}+b(u,u_x,u_t)u_{xx}=c(u,u_x,u_t), \tag{1}$$

其中 $u=u(t,x)$ 为 (t,x) 的未知函数，a, b, c 均为其变量在所考察的区域上的已知 C^1 函数，且成立

$$(a^2-4b)(0,0,0)>0 \tag{2}$$

及

$$c(0,0,0)=0. \tag{3}$$

由 (3)，$u=0$ 是 (1) 的一个解—平衡态。(2) 保证了方程 (1) 在平衡态附近为双曲型的。

初始条件为

$$t=0:\ (u,u_t)=\big(\varphi(x),\,\psi(x)\big),\quad 0\le x\le L, \tag{4}$$

其中 φ, ψ 分别是 $[0,L]$ 上的 C^2 和 C^1 函数。由 (2) 知，(1) 的特征方程

$$\lambda^2-a\lambda+b=0, \tag{5}$$

在平衡态附近具有两个互异的实特征根

$$\lambda_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}\triangleq\lambda,\quad \lambda_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}\triangleq\mu. \tag{6}$$

收稿日期: 2009-05-13. **作者简介**: 庄凯丽 (1984年12月生)，女，博士. 研究方向：偏微分方程.

李大潜和于立新在文 [6] 中对形如

$$u_{tt} - \big(K(u, u_x)\big)_x = F(u, u_x, u_t) \tag{7}$$

的一维拟线性波动方程建立了精确边界能控性理论，其中设 $K_{u_x}(0,0) > 0$ 及 $F(0,0,0) = 0$。这是 (1) 在 $a \equiv 0$, $b(0,0,0) < 0$ 时的一种特殊情况。

当 $a(0,0,0) \neq 0, b(0,0,0) < 0$ 时，李大潜、饶伯鹏和王志强[9] 在一端给定 Dirichlet 边界条件，另一端给定一般边界条件的情形下得到了相应的单侧能控性定理。

为了保证二阶拟线性双曲型方程 (1) 混合初边值问题的适定性，根据其特征根 λ, μ 在 $(u, u_x, u_t) = (0,0,0)$ 附近的不同分布情况，其边界条件应有相应的不同提法及要求。我们分以下三种情形进行讨论：

情形 1.1 $\lambda < 0 < \mu$，即 (1) 的两特征根为一正一负，这要求

$$b(0,0,0) < 0, \tag{8}$$

于是条件 (2) 自然满足。此时要在 $x = 0$ 及 $x = L$ 处分别提一个边界条件，设在 $x = 0$ 处给定

$$x = 0 : u = h(t), \tag{9}$$

或

$$x = 0 : R(u, u_x, u_t) = h(t), \tag{10}$$

而在 $x = L$ 处给定

$$x = L : u = \overline{h}(t), \tag{11}$$

或

$$x = L : \overline{R}(u, u_x, u_t) = \overline{h}(t), \tag{12}$$

其中 R 及 $\overline{R}$ 均为所含变量的 C^1 函数。

情形 1.2 $0 < \lambda < \mu$，即 (1) 的两特征根均为正，这要求

$$\begin{cases} a(0,0,0) > 0, \\ b(0,0,0) > 0. \end{cases} \tag{13}$$

此时，两个边界条件均提在 $x = 0$处，为

$$x = 0 : u = h(t), \quad u_x = \overline{h}(t). \tag{14}$$

当 (1) 的两特征根均为负，即 $\lambda < \mu < 0$ 时，两边界条件需提在 $x = L$ 处，情况类似，不再赘述。

情形 1.3 $\lambda \equiv 0 < \mu = a$，即 (1) 的两特征根为一正一零，这要求

$$\begin{cases} a(0,0,0) > 0, \\ b(u, u_x, u_t) \equiv 0, \end{cases} \tag{15}$$

于是 (2) 自然满足。此时只需在 $x = 0$ 处提一个边界条件 (9) 或 (10)。当方程的两特征根为一负一零时，情况类似，不再赘述。

对 **情形1.1** 和 **情形1.2**，我们分别建立了完整的局部精确边界能控性；对 **情形1.3**，由于此时方程 (1) 具有本质的零特征，仅通过边界控制实现精确能控性一般是做不到的。本文仅对其中一类特殊的方程建立了相应的单侧精确边界能控性。

为叙述方便，引入如下二个常数 $d, \overline{d}$

$$d = \begin{cases} 2 & \text{当边界条件取 (9) 时}, \\ 1 & \text{当边界条件取 (10) 时}. \end{cases} \qquad \overline{d} = \begin{cases} 2 & \text{当边界条件取 (11) 时}, \\ 1 & \text{当边界条件取 (12) 时}. \end{cases} \tag{16}$$

2 精确边界能控性

任意给定初始条件

$$t = 0 \,:\, (u, u_t) = \big(\varphi(x), \psi(x)\big), \quad 0 \leq x \leq L \tag{17}$$

与终端条件

$$t = T \,:\, (u, u_t) = \big(\Phi(x), \Psi(x)\big), \quad 0 \leq x \leq L. \tag{18}$$

我们试图寻找适当的 $T > 0$ 及边界控制 $h(t)$ 和 (或) $\overline{h}(t)$，使在区间 $[0, T]$ 上实现精确边界能控性。

情形2.1 $\lambda < 0 < \mu$。在 $x = 0$ 处边界条件取为 (10) 时，不妨设成立

$$R(0,0,0) = 0, \tag{19}$$

并且进一步假设成立

$$(R_2 - \mu R_3)(0,0,0) \neq 0. \tag{20}$$

类似地，当 $x = L$ 处边界条件取为 (12) 时，不妨设成立

$$\overline{R}(0,0,0) = 0, \tag{21}$$

并且进一步假设成立

$$(\overline{R}_2 - \lambda \overline{R}_3)(0,0,0) \neq 0, \tag{22}$$

其中 λ, μ 由 (6) 给出，而 R_i, $\overline{R}_i\,(i = 2,3)$ 分别表示 R, $\overline{R}$ 对第 i 个变量的一阶偏导数。

定理2.1 (双侧能控) 设 a, b, c 均为其变量的 C^1 函数，(2)-(3) 成立。在边界条件为 (10) 时，成立 (19)-(20)；在边界条件为 (12) 时，成立 (21)-(22)。令

$$T > L \max\left\{ \frac{1}{|\lambda(0,0,0)|}, \frac{1}{\mu(0,0,0)} \right\}. \tag{23}$$

任意给定初值 (φ, ψ) 和终值 $(\Phi, \Psi) \in C^2 \times C^1$，其中

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad \text{和} \quad \|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$$

充分小。则必存在边界控制 $h(t)$ 和 $\overline{h}(t)$，其中 $(h, \overline{h}) \in C^d \times C^{\overline{d}}$，且 $\|(h, \overline{h})\|_{C^d[0,T]\times C^{\overline{d}}[0,T]}$ 充分小。使得混合初边值问题 (1), (17), (9)-(10) 之一及 (11)-(12) 之一在区域 $R(T) = \{(t,x)\,|\,0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且精确满足终端条件 (18)。

证明 为了证明定理2.1，只需证明二阶拟线性双曲型方程(1)在区域 $R(T)$ 上存在一个 C^2 解
$u=u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且同时满足初始条件(17)和终端条件(18)。然后将其代入边界条件(9)-(10)之一及(11)-(12)之一即可得到相应的边界控制函数。

由(23)，存在 $\varepsilon>0$ 充分小，使得

$$T>L\max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon}\left\{\frac{1}{|\lambda(u,v,w)|},\frac{1}{\mu(u,v,w)}\right\}. \tag{24}$$

令

$$T_1=\frac{L}{2}\max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon}\left\{\frac{1}{|\lambda(u,v,w)|},\frac{1}{\mu(u,v,w)}\right\}, \tag{25}$$

我们分几个步骤来构造满足上述要求的 C^2 解 $u=u(t,x)$。

(i) 首先，考虑方程(1)具初始条件(17)及如下人为边界条件的前向混合初边值问题

$$\begin{cases} x=0: u=f_1(t),\\ x=L: u=f_2(t),\end{cases} \tag{26}$$

其中 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 是任意给定的，其 $C^2[0,T_1]$ 模充分小，且在点 $(t,x)=(0,0)$ 及 $(0,L)$ 分别满足 C^2 相容性条件。由引理3.1，该混合初边值问题在区域 $R_f=\{(t,x)\mid 0\le t\le T_1, 0\le x\le L\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_f(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 (u_f,u_{fx}) 在 $x=\frac{L}{2}$ 处的值，有

$$x=\frac{L}{2}:(u_f,u_{fx})=\big(\xi(t),\bar{\xi}(t)\big),\quad 0\le t\le T_1, \tag{27}$$

其中 $\|(\xi,\bar{\xi})\|_{C^2[0,T_1]\times C^1[0,T_1]}$ 充分小。

(ii) 同样地，我们考虑方程(1)具终端条件(18)及如下人为边界条件的后向混合初边值问题

$$\begin{cases} x=0: u=g_1(t),\\ x=L: u=g_2(t),\end{cases} \tag{28}$$

其中 $g_1(t)$ 及 $g_2(t)$ 是任意给定的，其 $C^2[T-T_1,T]$ 模充分小，且在点 $(t,x)=(T,0)$ 及 (T,L) 分别满足 C^2 相容性条件。由注3.1，该混合初边值问题在区域 $R_b=\{(t,x)\,|\,T-T_1\le t\le T, 0\le x\le L\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_b(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 (u_b,u_{bx}) 在 $x=\frac{L}{2}$ 处的值，有

$$x=\frac{L}{2}:(u_b,u_{bx})=\big(\eta(t),\bar{\eta}(t)\big),\quad T-T_1\le t\le T, \tag{29}$$

其中 $\|(\eta,\bar{\eta})\|_{C^2[T-T_1,T]\times C^1[T-T_1,T]}$ 充分小。

(iii) 注意到(8)，交换变量 t,x 的地位，将方程(1)改写成如下形式

$$u_{xx}+\frac{a}{b}u_{tx}+\frac{1}{b}u_{tt}=\frac{c}{b}. \tag{30}$$

考虑方程(30)具初始条件

$$x=\frac{L}{2}:(u,u_x)=\big(\gamma(t),\bar{\gamma}(t)\big),\quad 0\le t\le T \tag{31}$$

和边界条件

$$\begin{cases} t=0\,:\,u=\varphi(x), & 0\le x\le \frac{L}{2}, \\ t=T\,:\,u=\Phi(x), & 0\le x\le \frac{L}{2} \end{cases} \tag{32}$$

的左向混合初边值问题，其中 $\|(\gamma,\bar\gamma)\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ 充分小，且满足

$$\big(\gamma(t),\bar\gamma(t)\big)=\begin{cases} \big(\xi(t),\bar\xi(t)\big), & 0\le t\le T_1, \\ \big(\eta(t),\bar\eta(t)\big), & T-T_1\le t\le T. \end{cases} \tag{33}$$

由引理3.1，该左向混合初边值问题在区域 $R_l=\{(t,x)\,|\,0\le t\le T, 0\le x\le \frac{L}{2}\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_l(t,x)$，其 C^2 模充分小。

(iv) 同样地，对方程 (30) 具初始条件 (31) 和边界条件

$$\begin{cases} t=0\,:\,u=\varphi(x), & \frac{L}{2}\le x\le L, \\ t=T\,:\,u=\Phi(x), & \frac{L}{2}\le x\le L \end{cases} \tag{34}$$

的右向混合初边值问题，由引理3.1，其在区域 $R_r=\{(t,x)|0\le t\le T,\ \frac{L}{2}\le x\le L\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u=u_r(t,x)$，其 C^2 模充分小。

(v) 令

$$u(t,x)=\begin{cases} u_l(t,x), & (t,x)\in R_l, \\ u_r(t,x), & (t,x)\in R_r. \end{cases} \tag{35}$$

易知 $u\in C^2[R(T)]$，且在 $R(T)$ 上满足方程 (1)。下面只需证明 $u=u(t,x)$ 满足初始条件 (17) 和终端条件 (18)。

事实上，C^2 解 $u=u_l(t,x)$ (相应的 $u=u_r(t,x)$) 和 $u=u_f(t,x)$ 同时满足方程 (30) (即 (1))，初始条件

$$x=\frac{L}{2}\,:\,(u,u_x)=\big(\xi(t),\bar\xi(t)\big),\quad 0\le t\le T_1 \tag{36}$$

和边界条件

$$t=0\,:\,u=\varphi(x),\quad 0\le x\le \frac{L}{2}, \tag{37}$$

相应地，

$$t=0\,:\,u=\varphi(x),\quad \frac{L}{2}\le x\le L,$$

由 T_1 的选取 (25) 知，区域

$$\Big\{(t,x)\,|\,0\le t\le \frac{2T_1x}{L}, 0\le x\le \frac{L}{2}\Big\},$$

相应地，

$$\Big\{(t,x)\,|\,0\le t\le \frac{2T_1(L-x)}{L}, \frac{L}{2}\le x\le L\Big\}$$

包含在单侧混合初边值问题 (1), (36)-(37) 的最大决定区域内。由 C^2 解的唯一性 (参见文 [11]) 知，在上述区域内有 $u(t,x)\equiv u_f(t,x)$，特别有 (17) 成立。同理，(18) 成立。定理 2.1 证毕。

注 2.1 关于控制时间的估计 (23) 是不可改进的，它保证了前、后向 Cauchy 问题的最大决定区域互不相交。

为了说明这一点，考察方程

$$u_{tt}+\frac{1}{2}u_{tx}-\frac{1}{2}u_{xx}=0, \tag{38}$$

它有两个特征根

$$\lambda=-\frac{1}{2}, \quad \mu=1. \tag{39}$$

前向 Cauchy 问题 (38) 及 (17) 的最大决定区域为 $\{(t,x)\,|\,x\leqslant t\leqslant 2L-2x, 0\leqslant x\leqslant L\}$。后向 Cauchy 问题 (38) 及 (18) 的最大决定区域为 $\{(t,x)\,|\,T-2x\leqslant t\leqslant x-L+T, 0\leqslant x\leqslant L\}$。若 $T\leqslant 2L$，如图 1。

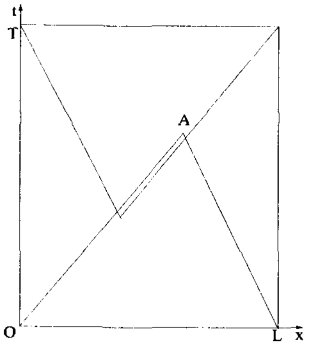

图 1: 特征根一正一负时的双侧能控

注意到前向 Cauchy 问题的最大决定区域之顶点 A 为 $(\frac{2}{3}L, \frac{2}{3}L)$，在 $T\leqslant 2L$ (且不妨设 $T\geqslant L$) 时必落在后向 Cauchy 问题的最大决定区域之内，这两个三角形区域必相交，与解的相容性相矛盾。

定理 2.2 ($x=0$ 处单侧能控) 在定理 2.1 的假设下，进一步假设成立

$$(\overline{R}_2-\mu\overline{R}_3)(0,0,0)\neq 0. \tag{40}$$

令

$$T>L\Big\{\frac{1}{|\lambda(0,0,0)|}+\frac{1}{\mu(0,0,0)}\Big\}. \tag{41}$$

对任意给定的初值 (φ,ψ)，终值 $(\Phi,\Psi)\in C^2\times C^1$，

$$\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 和 \quad \|(\Phi,\Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$$

充分小，任意给定的 $\overline{h}\in C^{\overline{d}}$，$\|\overline{h}\|_{C^{\overline{d}}[0,T]}$ 充分小，且在点 $(t,x)=(0,0)$ 和 $(0,L)$ 分别满足 C^2 相容性条件，必存在 $x=0$ 处之边界控制 $h\in C^d$，且 $\|h\|_{C^d[0,T]}$ 充分小，使得混合初边值问题 (1), (17), (9)-(10) 之一及 (11)-(12) 之一在区域 $R(T)=\{(t,x)\mid 0\le t\le T, 0\le x\le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u=u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且精确满足终端条件 (18)。

证明 为了证明定理 2.2，只需证明二阶拟线性双曲型方程 (1) 在区域 $R(T)$ 上存在一个 C^2 解

$u=u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且同时满足初始条件 (17)，终端条件 (18) 以及在 $x=L$ 处之边界条件 (11)-(12) 之一。然后将其代入 $x=0$ 处之边界条件 (9) 或 (10)，即可得到边界控制函数 h。

由(41)，存在 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得

$$T > L \max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon} \left\{ \frac{1}{|\lambda(u,v,w)|} + \frac{1}{\mu(u,v,w)} \right\}. \tag{42}$$

令

$$T_1 = \max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon} \frac{L}{\mu(u,v,w)}, \quad T_2 = \max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon} \frac{L}{|\lambda(u,v,w)|}. \tag{43}$$

(i) 首先，考虑方程(1)具初始条件(17)和边界条件(11)-(12)之一及如下人为边界条件

$$x = 0 : u = f(t) \tag{44}$$

的前向混合初边值问题，其中 f 是任意给定的 t 的 C^2 函数，其 $C^2[0,T_1]$ 模充分小，且在点 $(t,x)=(0,0)$ 满足 C^2 相容性条件。由引理3.1，该前向混合初边值问题在区域 $R_f = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_1, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u = u_f(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 $(u_f,\, u_{fx})$ 在 $x = L$ 处的值，有

$$x = L : (u_f, u_{fx}) = \big(\xi(t), \bar{\xi}(t)\big), \quad 0 \le t \le T_1, \tag{45}$$

其中 $\|(\xi,\bar{\xi})\|_{C^2[0,T_1]\times C^1[0,T_1]}$ 充分小。

(ii) 同样地，我们考虑方程(1)具终端条件(18)和边界条件(11)-(12)之一及如下人为边界条件

$$x = 0 : u = g(t) \tag{46}$$

的后向混合初边值问题，其中 g 是任意给定的 t 的 C^2 函数，其 $C^2[T-T_2,T]$ 模充分小，且在点 $(t,x)=(T,0)$ 满足 C^2 相容性条件。注意到(40)，由注3.1，该后向混合初边值问题在区域 $R_b = \{(t,x) \mid T-T_2 \le t \le T, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的 C^2 解 $u = u_b(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 $(u_b,\, u_{bx})$ 在 $x = L$ 处的值，有

$$x = L : \big(u_b(t), u_{bx}(t)\big) = \big(\eta(t), \bar{\eta}(t)\big), \quad T - T_2 \le t \le T, \tag{47}$$

其中 $\|(\eta,\bar{\eta})\|_{C^2[T-T_2,T]\times C^1[T-T_2,T]}$ 充分小。

(iii) 注意到(8)，交换变量 t, x 的地位。考虑方程(30)具初始条件

$$x = L : (u, u_x) = \big(\gamma(t), \bar{\gamma}(t)\big), \quad 0 \le t \le T \tag{48}$$

和边界条件

$$\begin{cases} t = 0 : u = \varphi(x), \\ t = T : u = \Phi(x) \end{cases} \tag{49}$$

的右向混合初边值问题，其中 $\|(\gamma,\bar{\gamma})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ 充分小，满足

$$\big(\gamma(t), \bar{\gamma}(t)\big) = \begin{cases} \big(\xi(t), \bar{\xi}(t)\big), & 0 \le t \le T_1, \\ \big(\eta(t), \bar{\eta}(t)\big), & T - T_2 \le t \le T, \end{cases} \tag{50}$$

且在 $0 \le t \le T$ 上满足边界条件(11)-(12)之一。由引理3.1及注3.1，该右向混合初边值问题在区域 $R(T)$ 上存在唯一的 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小。下面只需证明 $u = u(t,x)$ 满足初始条件(17)和终端条件(18)。

事实上，C^2 解 $u=u(t,x)$ 和 $u=u_f(t,x)$ 同时满足方程 (30) (即 (1)) 及初始条件

$$x=L:(u,u_x)=\big(\xi(t),\bar{\xi}(t)\big),\quad 0\le t\le T_1 \tag{51}$$

与边界条件

$$t=0:u=\varphi(x). \tag{52}$$

由 T_1 的选取 (43) 知，区域 $\{(t,x)\mid 0\le t\le \frac{T_1}{L}x, 0\le x\le L\}$ 包含在单侧混合初边值问题 (1), (51) 及 (52) 的最大决定区域内，由 C^2 解的唯一性 (参见文 [11]) 知，在上述区域内有 $u(t,x)\equiv u_f(t,x)$，特别有 (17) 成立。同理，(18) 成立。定理 2.2 证毕。

注 2.2 关于控制时间的估计 (41) 是不可改进的，它保证了前、后向单侧混合问题的最大决定区域不相交。

为说明这一点，考察方程 (38) 具初始条件 (17) 和边界条件 (9) 的前向单侧混合问题，其最大决定区域为 $\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant 2L-2x, 0\leqslant x\leqslant L\}$。而方程 (38) 具初始条件 (18) 和边界条件 (9) 的后向单侧混合问题，其最大决定区域为 $\{(t,x)\mid x-L+T\leqslant t\leqslant T, 0\leqslant x\leqslant L\}$。若 $T\leqslant 3L$，如图 2。

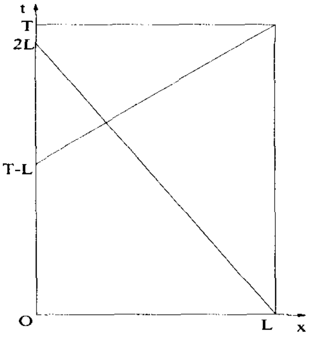

图 2: 特征根一正一负时的单侧能控

这两个三角形区域必相交，从而与解的相容性矛盾。

注 2.3 单侧边界控制也可以给在 $x=L$ 这一侧，但此时需将假设 (40) 改成

$$(R_2-\lambda R_3)(0,0,0)\neq 0. \tag{53}$$

注 2.4 文 [8] 中关于一维拟线性波动方程的能控性结果是定理 2.1 及定理 2.2 的直接推论。

情形 2.2 $0<\lambda<\mu$。

定理 2.3 ($x=0$ 处单侧能控) 设 a, b, c 均为其变量的 C^1 函数，(2)-(3) 及 (13) 成立，令

$$T>\frac{L}{\lambda(0,0,0)}. \tag{54}$$

对任意给定的初值 (φ,ψ)，终值 $(\Phi,\Psi)\in C^2\times C^1$，

$$\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 和 \quad \|(\Phi,\Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$$

充分小，必存在 $x=0$ 处的边界控制 $(h,\overline{h})\in C^2\times C^1$，且 $\|(h,\overline{h})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ 充分小。使得混合初边值问题 (1), (17) 及 (14) 在区域 $R(T)=\{(t,x)\mid 0\le t\le T, 0\le x\le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u=u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且精确满足终端条件 (18)。

证明 为了证明定理2.3，只需证明二阶拟线性双曲型方程(1)在区域$R(T)$上存在一个C^2解$u = u(t,x)$，其C^2模充分小，且同时满足初始条件(17)和终端条件(18)。然后将其代入边界条件(14)中即可得到相应的边界控制函数$(h,\overline{h})$。

由(54)，存在$\varepsilon > 0$充分小，使得

$$T > \max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon} \frac{L}{\lambda(u,v,w)}. \tag{55}$$

取

$$T_1 = \max_{|(u,v,w)|\le\varepsilon} \frac{L}{\lambda(u,v,w)}, \quad T_2 > 0 \tag{56}$$

满足

$$T_1 + T_2 < T. \tag{57}$$

(i) 首先，考虑方程(1)具初始条件(17)和如下人为边界条件

$$x = 0 : u = f_1(t), \quad u_x = f_2(t) \tag{58}$$

的前向混合初边值问题，其中$(f_1(t), f_2(t))$是任意给定的，其$C^2[0,T_1]\times C^1[0,T_1]$模充分小，且在点$(t,x) = (0,0)$满足$C^2$相容性条件。由引理3.2，该混合初边值问题在区域$R_f$上存在唯一的$C^2$解$u = u_f(t,x)$，其$C^2$模充分小。这样我们就可以唯一确定$(u_f, u_{fx})$在$x = L$处的值(45)，其中$\|(\xi,\bar{\xi})\|_{C^2[0,T_1]\times C^1[0,T_1]}$充分小。

(ii) 同样地，我们考虑方程(1)具终端条件(18)和如下人为边界条件

$$x = L : u = g_1(t), \quad u_x = g_2(t) \tag{59}$$

的后向混合初边值问题，其中$(g_1(t), g_2(t))$是任意给定的，其$C^2[T-T_2,T]\times C^1[T-T_2,T]$模充分小，且在点$(t,x) = (T,L)$满足$C^2$相容性条件。由注3.2，该混合初边值问题在区域$R_b$上存在唯一的$C^2$解$u = u_b(t,x)$，其$C^2$模充分小。这样我们就可以唯一确定$(u_b, u_{bx})$在$x = L$处的值(47)，其中$\|(\eta,\bar{\eta})\|_{C^2[T-T_2,T]\times C^1[T-T_2,T]}$充分小。

(iii) 注意到(13)，交换变量t, x的地位。考虑方程(30)具初始条件(48)和边界条件

$$t = T : u = \Phi(x), \quad u_t = \Psi(x) \tag{60}$$

的左向混合初边值问题，其中$\|(\gamma,\bar{\gamma})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$充分小，满足(50)。由引理3.2及注3.2，此左向混合初边值问题在区域$R(T)$上存在唯一的C^2解$u = u(t,x)$，其C^2模充分小。下面只需证明$u = u(t,x)$满足初始条件(6)。

事实上，C^2解$u = u(t,x)$和$u = u_f(t,x)$同时满足方程(30)(即(1))及初始条件(51)。由T_1的选取(56)知，区域$\{(t,x) \mid 0 \le t \le \frac{T_1}{L}x,\ 0 \le x \le L\}$包含在Cauchy问题(1)及(51)的最大决定区域内。由C^2解的唯一性(参见文[11])知，在上述区域内有$u(t,x) \equiv u_f(t,x)$。特别有(17)成立。定理2.3证毕。

注2.5 关于控制时间的估计(54)是不可改进的，它保证了前向Cauchy问题的最大决定区域与线段$\{(t,x) \mid t = T,\ 0 \le x \le L\}$不相交。

为了说明这一点，考察方程

$$u_{tt} + 2u_{tx} + u_{xx} = 0, \tag{61}$$

它有两个正特征根

$$\lambda = \mu = 1. \tag{62}$$

前向 Cauchy 问题 (61) 及 (17) 的最大决定区域为 $\{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant x,\, 0 \leqslant x \leqslant L\}$。若 $T \leqslant L$，如图 3。

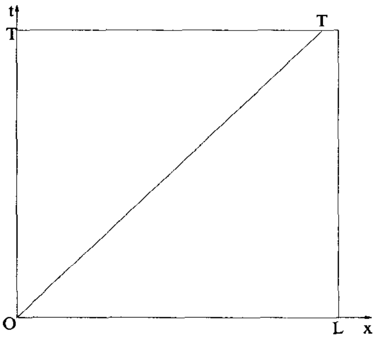

图 3: $x = 0$ 处的单侧能控

该最大决定区域与线段 $\{(t,x) \mid t = T,\, 0 \le x \le L\}$ 必相交，与解的相容性相矛盾。

情形 2.3 $0 \equiv \lambda < \mu$。此时 (1) 具有本质的零特征，而具零特征的拟线性双曲型方程通常需要加内部控制来实现其精确能控性[12]，仅通过边界控制实现精确能控性很难做到。下面我们将对一类特殊的方程建立其精确边界能控的充分必要条件。

考虑如下的二阶拟线性双曲型方程

$$\big(u_t + \widetilde{a}(u)u_x + \widetilde{b}(u)\big)_t = 0, \tag{63}$$

即

$$u_{tt} + \widetilde{a}(u)u_{tx} = -\widetilde{a}'(u)u_x u_t - \widetilde{b}'(u)u_t, \tag{64}$$

其中 $\widetilde{a}, \widetilde{b} \in C^2$，且

$$\widetilde{a}(0) > 0. \tag{65}$$

这相当于 (1) 中

$$\begin{cases} a(u,u_x,u_t) = \widetilde{a}(u), \\ b(u,u_x,u_t) \equiv 0, \\ c(u,u_x,u_t) = -\widetilde{a}'(u)u_x u_t - \widetilde{b}'(u)u_t. \end{cases} \tag{66}$$

由方程 (63)，成立

$$u_t + \widetilde{a}(u)u_x + \widetilde{b}(u) = \widetilde{c}(x), \quad \forall\, t, \tag{67}$$

其中 $\widetilde{c}(x)$ 为一与 t 无关的函数，因此对任意给定的初值 (φ,ψ) 及终值 (Φ,Ψ)，必要求成立

$$\begin{aligned} &\psi(x) + \widetilde{a}(\varphi(x))\varphi'(x) + \widetilde{b}(\varphi(x)) \\ =\ &\Psi(x) + \widetilde{a}(\Phi(x))\Phi'(x) + \widetilde{b}(\Phi(x)) \triangleq \widetilde{c}(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L, \end{aligned} \tag{68}$$

且 $\widetilde{c}(x) \in C^1[0,L]$，且其 $C^1[0,L]$ 模充分小。由此可知，(68) 是 (63) 单侧边界能控的必要条件。下面证明 (68) 也是充分的，即只要初值 (φ,ψ) 与终值 (Φ,Ψ) 满足 (68) 式，必可以找到边界控制 $h(t)$ 实现精确边界能控性。

定理 2.4 ($x = 0$ 处单侧能控)　设 $\widetilde{a}, \widetilde{b}$ 均为其变量的 C^2 函数，边界条件为 (9) 或 (10)，而在边界条件为 (10) 时，成立 (19)-(20)。令

$$T > \frac{L}{\widetilde{a}(0)}. \tag{69}$$

对任意给定的初值 (φ, ψ) 及终值 $(\Phi, \Psi) \in C^2 \times C^1$，

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 和 \quad \|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]}$$

充分小，且满足 (68)。必存在 $x = 0$ 处的边界控制 $h \in C^d$，且 $\|h\|_{C^d[0,T]}$ 充分小，使得混合初边值问题 (63), (17) 及 (9)-(10) 之一在区域 $R(T) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且精确满足终端条件 (18)。

证明　为了证明定理 2.4，只需证明二阶拟线性双曲型方程 (63) (或 (64)) 在区域 $R(T)$ 上存在一个 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且同时满足初始条件 (17) 和终端条件 (18)。然后将其代入边界条件 (9) 或 (10) 中即可得到相应的边界控制函数 h。

由 (69)，存在 $\varepsilon > 0$ 充分小，使得

$$T > \max_{|u|\le\varepsilon} \frac{L}{\widetilde{a}(u)}. \tag{70}$$

取

$$T_1 = \max_{|u|\le\varepsilon} \frac{L}{\widetilde{a}(u)}, \quad T_2 > 0 \tag{71}$$

满足

$$T_1 + T_2 < T. \tag{72}$$

(i)　首先，考虑方程 (64) 具初始条件 (17) 和人为边界条件 (44) 的前向混合初边值问题，其中 f 是任意给定的 t 的 C^2 函数，其 $C^2[0,T_1]$ 模充分小，且在点 $(t,x) = (0,0)$ 满足 C^2 相容性条件。由引理 3.3，该前向混合初边值问题在区域 R_f 上存在唯一的 C^2 解 $u = u_f(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 (u_f, u_{fx}) 在 $x = L$ 处的值 (45)，其中 $\|(\xi, \bar{\xi})\|_{C^2[0,T_1]\times C^1[0,T_1]}$ 充分小且满足

$$x = L : w + \widetilde{a}(u)v + \widetilde{b}(u) = \widetilde{c}(L), \quad 0 \leqslant t \leqslant T_1, \tag{73}$$

其中 $u = \xi(t),\ v = \bar{\xi}(t),\ w = \xi'(t)$。

(ii)　同样地，我们考虑方程 (64) 具终端条件 (18) 和如下人为边界条件

$$x = L : u = g(t) \tag{74}$$

的后向混合初边值问题，其中 g 是任意给定的 t 的 C^2 函数，其 $C^2[T-T_2, T]$ 模充分小，且在点 $(t,x) = (T,L)$ 满足 C^2 相容性条件。由注 3.3，该混合初边值问题在区域 R_b 上存在唯一的 C^2 解 $u = u_b(t,x)$，其 C^2 模充分小。这样我们就可以唯一确定 (u_b, u_{bx}) 在 $x = L$ 处的值 (47)，其中 $\|(\eta, \bar{\eta})\|_{C^2[T-T_2,T]\times C^1[T-T_2,T]}$ 充分小且满足

$$x = L : w + \widetilde{a}(u)v + \widetilde{b}(u) = \widetilde{c}(L), \quad T - T_2 \leqslant t \leqslant T, \tag{75}$$

其中 $u = \eta(t),\ v = \bar{\eta}(t),\ w = \eta'(t)$。

(iii)　将 (67) 关于 x 求导，得

$$\big(u_t + \widetilde{a}(u)u_x + \widetilde{b}(u)\big)'_x = \widetilde{c}'(x), \tag{76}$$

其中 $\widetilde{c}'(x)\in C[0,L]$。令

$$v=u_x,\quad w=u_t,\quad U=(u,v,w)^T,\tag{77}$$

则 (76) 可改写成一阶拟线性双曲组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=v,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{1}{\widetilde{a}(u)}\dfrac{\partial v}{\partial t}=\dfrac{1}{\widetilde{a}(u)}\big(-\widetilde{a}'(u)v^2-\widetilde{b}'(u)v+\widetilde{c}'(x)\big),\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}x-\dfrac{\partial v}{\partial t}=0,\end{cases}\tag{78}$$

或写为

$$\frac{\partial U}{\partial x}x+\widetilde{A}(U)\frac{\partial U}{\partial t}=\widetilde{F}(U),\tag{79}$$

其中

$$\widetilde{A}(U)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{\widetilde{a}(u)}&0\\0&-1&0\end{pmatrix},\quad \widetilde{F}(U)=\begin{pmatrix}v\\ \frac{1}{\widetilde{a}(u)}\big(-\widetilde{a}'(u)v^2-\widetilde{b}'(u)v+\widetilde{c}'(x)\big)\\ 0\end{pmatrix}.\tag{80}$$

易知，$\widetilde{A}(U)$ 有三个特征根 $\frac{dt}{dx}=\widetilde{\lambda}_i(U)$ $(i=1,2,3)$，其中

$$\widetilde{\lambda}_1=\widetilde{\lambda}_2=0,\quad \widetilde{\lambda}_3=\frac{1}{\widetilde{a}(u)},\tag{81}$$

而相应的左特征向量可取为

$$\begin{cases}\widetilde{l}_1(U)=(1,0,0),\\ \widetilde{l}_2(U)=\big(0,\widetilde{a}(u),1\big),\\ \widetilde{l}_3(U)=(0,1,0).\end{cases}\tag{82}$$

于是可将 (79) 改写成如下的特征形式

$$\widetilde{l}_i(U)\big(U_x+\widetilde{\lambda}_i(U)U_t\big)=\widetilde{\mu}_i(U),\tag{83}$$

其中

$$\begin{cases}\widetilde{\mu}_1(U)=v,\\ \widetilde{\mu}_2(U)=-\widetilde{a}'(u)v^2-\widetilde{b}'(u)v+\widetilde{c}'(x),\\ \widetilde{\mu}_3(U)=\frac{-\widetilde{a}'(u)v^2-\widetilde{b}'(u)v+\widetilde{c}'(x)}{\widetilde{a}(u)},\end{cases}\tag{84}$$

而 $\widetilde{c}'(x)=(\partial_x+\widetilde{\lambda}_2(U)\partial_t)\widetilde{c}(x)=(\partial_x+\widetilde{\lambda}_3(U)\partial_t)\widetilde{c}(x)$，且 $\|\widetilde{c}\|_{C^1[0,L]}$ 充分小。

考虑方程 (79) 具初始条件

$$x=L:U=\big(\gamma(t),\bar{\gamma}(t),\gamma'(t)\big),\quad 0\le t\le T\tag{85}$$

和边界条件

$$t=T:u=\Phi(x),\quad 0\le x\le L\tag{86}$$

的左向混合初边值问题，其中 $\|(\gamma,\bar{\gamma})\|_{C^2[0,T]\times C^1[0,T]}$ 充分小，满足 (50) 且

$$x=L\,:\,w+\widetilde{a}(u)v+\widetilde{b}(u)=\widetilde{c}(L),\quad 0\leqslant t\leqslant T,\tag{87}$$

其中 $u=\gamma(t)$, $v=\bar{\gamma}(t)$, $w=\gamma'(t)$。

易证，边界条件 (86) 在 $U=0$ 的一个邻域内可改写成

$$t=T\,:\,v_3=G_3(x,v_1,v_2)+H_3(x)\tag{88}$$

的形式，其中 $v_i=l_i(U)U\ (i=1,2,3)$，而 $G_3(x,0,0)\equiv 0$，且 $\|H_3\|_{C^1[0,L]}$ 充分小 (参见文 [10])。由文 [13,14]，该混合初边值问题在区域 $R(T)$ 上存在唯一的半整体 C^1 解 $U=U(t,x)=(u(t,x),v(t,x),w(t,x)^T)$，且 $\|U\|_{C^1[R(T)]}$ 充分小。现在证明 $u=u(t,x)\in C^2[R(T)]$ 其 C^2 模充分小，且 $v=u_x$, $w=u_t$。由 (78) 的第 1 式，有 $v(t,x)=u_x(t,x)$。将其代入 (78) 的第 3 式，得 $\partial_x(w-u_t)=0$，对其关于 x 在 $[x,L]$ 上积分，再注意到 (85)，就得到 $w(t,x)=u_t(t,x)$。从而可得 $u(t,x)\in C^2[R(T)]$，且其 C^2 模充分小。注意到 (87)，由 (76) 可得，$u=u(t,x)$ 满足方程

$$u_t+\widetilde{a}(u)u_x+\widetilde{b}(u)=\widetilde{c}(x),\quad 0\leqslant t\leqslant T.\tag{89}$$

从而 $u=u(t,x)$ 满足方程 (63) (即 (64))。

接下来只需证明 $u=u(t,x)$ 满足初始条件 (17) 和终端条件 (18)。

事实上，C^2 解 $u=u(t,x)$ 和 $u=u_f(t,x)$ 同时满足方程 (64) 及初始条件 (51)。由 T_1 的选取 (71) 知，区域 $\{(t,x)\mid 0\le t\le \frac{T_1}{L}x,\ 0\le x\le L\}$ 包含在 Cauchy 问题 (64) 及 (51) 的最大决定区域内。由 C^2 解的唯一性 (参见文 [11]) 知，在上述区域内有 $u(t,x)\equiv u_f(t,x)$，特别有 (17) 成立。

同理，C^2 解 $u=u(t,x)$ 和 $u=u_b(t,x)$ 同时满足方程 (64) 及初始条件

$$x=L\,:\,(u,u_x)=\big(\eta(t),\bar{\eta}(t)\big),\quad T-T_2\le t\le T\tag{90}$$

与边界条件 (86)。由 $T_2>0$ 知，区域 $\{(t,x)\mid T-T_2\le t\le T,\ 0\le x\le L\}$ 包含在单侧混合问题 (64), (90) 及 (86) 的最大决定区域内。由 C^2 解的唯一性 (参见文 [11]) 知，在上述区域内有 $u(t,x)\equiv u_b(t,x)$，特别有 (18) 成立。定理 2.4 证毕。

注 2.6　关于控制时间的估计 (69) 是不可改进的，它保证了前向 Cauchy 问题的最大决定区域与线段 $\{(t,x)\mid t=T,\ 0\le x\le L\}$ 不相交。

为了说明这一点，考察方程

$$u_{tt}+u_{tx}=0,\tag{91}$$

它有两个特征根

$$\lambda=0,\quad \mu=1.\tag{92}$$

前向 Cauchy 问题 (91) 及 (17) 的最大决定区域为 $\{(t,x)\mid 0\leqslant t\leqslant x,\ 0\leqslant x\leqslant L\}$。若 $T\leqslant L$，如图 3，该区域与线段 $\{(t,x)\mid t=T,\ 0\le x\le L\}$ 必相交，从而与解的相容性矛盾。

注 2.7　定理 2.1 至定理 2.4 中的边界控制不唯一。

3　附录

由文 [10]，可得以下一些前面讨论中用到的结论。

情形 3.1 $\lambda < 0 < \mu$。

引理 3.1 (半整体 C^2 解) 在假设 (19)-(22) 下，进而假设 $(\varphi,\psi) \in C^2 \times C^1$，$(h,\overline{h}) \in C^d \times C^{\overline{d}}$，在点 $(t,x) = (0,0)$ 及 $(0,L)$ 处分别满足 C^2 相容性条件，并且 (3) 及 (8) 成立。对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，只要

$$\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|h,\overline{h}\|_{C^d[0,T_0]\times C^{\overline{d}}[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则混合初边值问题 (1),(4),(9)-(10) 之一及 (11)-(12) 之一在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0,\ 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\left(\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|(h,\overline{h})\|_{C^d[0,T_0]\times C^{\overline{d}}[0,T_0]}\right), \tag{93}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

注 3.1 在假设 (19) 及 (21) 下，代替 (20) 及 (22) 假设

$$(R_2 - \lambda R_3)(0,0,0) \neq 0, \tag{94}$$

$$(\overline{R}_2 - \mu \overline{R}_3)(0,0,0) \neq 0. \tag{95}$$

对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，给定终值

$$t = T_0 : (u, u_x) = (\Phi, \Psi), \quad 0 \le x \le L, \tag{96}$$

其中 $(\Phi,\Psi) \in C^2 \times C^1$，并设 $(h,\overline{h}) \in C^d \times C^{\overline{d}}$，在点 $(t,x) = (T_0,0)$ 及 (T_0,L) 处分别满足 C^2 相容性条件，且 (3) 及 (8) 成立。只要

$$\|(\Phi,\Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|h,\overline{h}\|_{C^d[0,T_0]\times C^{\overline{d}}[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则后向混合初边值问题 (1),(96),(9)-(10) 之一及 (11)-(12) 之一在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0,\ 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\left(\|(\Phi,\Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|(h,\overline{h})\|_{C^d[0,T_0]\times C^{\overline{d}}[0,T_0]}\right), \tag{97}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

情形 3.2 $0 < \lambda < \mu$。

引理 3.2 (半整体 C^2 解) 假设 $(\varphi,\psi) \in C^2 \times C^1$，$(h,\overline{h}) \in C^2 \times C^1$，在点 $(t,x) = (0,0)$ 处满足 C^2 相容性条件，并且 (2)-(3) 及 (13) 成立。对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，只要

$$\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|(h,\overline{h})\|_{C^2[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则混合初边值问题 (1),(4) 及 (14) 在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0,\ 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t,x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\left(\|(\varphi,\psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|(h,\overline{h})\|_{C^2[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}\right), \tag{98}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

注 3.2 对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，给定终值 (96)，其中 $(\Phi, \Psi) \in C^2 \times C^1$。对 $(h, \overline{h}) \in C^2 \times C^1$，在 $x = L$ 处给定边界条件

$$x = L : u = h(t), \quad u_x(t) = \overline{h}(t). \tag{99}$$

假设在点 $(t, x) = (T_0, L)$ 处满足 C^2 相容性条件，且 (2)-(3) 及 (13) 成立。只要

$$\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|h, \overline{h}\|_{C^2[0,T_0]\times C^1[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则后向混合初边值问题 (1), (96) 及 (99) 在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\big(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|(h, \overline{h})\|_{C^2[0,T_0]\times C^1[0,T_0]} \big), \tag{100}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

情形 3.3 $0 \equiv \lambda < \mu$。

引理 3.3 (半整体 C^2 解) 假设 $(\varphi, \psi) \in C^2 \times C^1$，在 $x = 0$ 处给定边界条件 (9) 或 (10)，其中 $h \in C^d$，且在 (10) 的情况下假设 (19)-(20) 成立，并假设在点 $(t, x) = (0, 0)$ 处满足 C^2 相容性条件，且 (3) 及 (15) 成立。对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，只要

$$\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|h\|_{C^d[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则混合初边值问题 (1), (4) 及 (9)-(10) 之一在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\big(\|(\varphi, \psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|h\|_{C^d[0,T_0]} \big), \tag{101}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

注 3.3 对任意给定且可能相当大的 $T_0 > 0$，给定终值 (96)，其中 $(\Phi, \Psi) \in C^2 \times C^1$。在 $x = L$ 处给定边界条件 (11) 或 (12)，其中 $\overline{h} \in C^{\overline{d}}$，且在 (12) 的情况下假设 (21) 及 (95) 成立，并假设在点 $(t, x) = (T_0, L)$ 处满足 C^2 相容性条件，且 (3) 及 (15) 成立。只要

$$\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} \quad 及 \quad \|\overline{h}\|_{C^{\overline{d}}[0,T_0]}$$

充分小 (依赖于 T_0)，则混合初边值问题 (1), (96) 及 (11)-(12) 之一在区域 $R(T_0) = \{(t,x) \mid 0 \le t \le T_0, 0 \le x \le L\}$ 上存在唯一的半整体 C^2 解 $u = u(t, x)$，其 C^2 模充分小，且成立下列估计式

$$\|u\|_{C^2[R(T_0)]} \le K\big(\|(\Phi, \Psi)\|_{C^2[0,L]\times C^1[0,L]} + \|\overline{h}\|_{C^{\overline{d}}[0,T_0]} \big), \tag{102}$$

其中 K 是一个可能依赖于 T_0 的正常数。

致谢：作者感谢李大潜院士和王志强老师宝贵的建议和不倦的教诲。

参考文献：

[1] Lions J L. Exact controllability, stabilization and pertubations for distributed systems[J]. SIAM Review, 1988, 30: 1-68

[2] Russell D L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations: recent progress and open questions[J]. SIAM Rev, 1978, 20: 639-739

[3] Li Tatsien, Rap Bopeng. Local exact boundary controllability for a class of quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math, 2002, 23B: 209-218
[4] Li Tatsien, Rap Bopeng. Exact boundary controllability for quasilinear hyperbolic systems[J]. SIAM J Control Optim, 2003, 41: 1748-1755
[5] Li Tatsien, Wang Z Q. A note on the exact controllability for nonautonomous hyperbolic systems[J]. Commun Pure Appl Anal, 2007, 6: 229-235
[6] Li Tatsien, Yu L X. Exact boundary controllability for 1-D quasilinear wave equations[J]. SIAM J Control Optim, 2006, 45: 1074-1083
[7] Wang Z Q. Exact controllability for nonautonomous first order quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math, 2006, 27B: 643-656
[8] Wang Z Q. Exact boundary controllability for nonautonomous quasilinear wave equation[J]. Math Meth Appl Sci, 2007, 30: 1311-1327
[9] Li Tatsien, Rap Bopeng, Wang Z Q. A note on the one-side exact controllability for quasilinear hyperbolic systems[J]. Commun Pure Appl Anal, 2009, 8: 405-418
[10] 尚培培，庄凯丽. 二阶拟线性双曲型方程的精确能观性[J]. 工程数学学报，2009, 26(4): 618–636
[11] Li Tatsien, Yu W C. Boundary Value Problems for Quasilinear Hyperbolic Systems[M]. Duke University Mathematics Series V, 1985
[12] Li Tatsien, Yu L X. Exact controllability for first order quasilinear hyperbolic systems with zero eigenvalues[J]. Chin Ann Math, 2003, 24B: 415-422
[13] Li Tatsien, Jin Y. Semi-global C^1 solution to the mixed initial-boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems[J]. Chin Ann Math, 2001, 22B: 325-336
[14] 李大潜，沈玮熙等. 拟线性双曲-抛物耦合方程组的第二边值问题[J]. 数学年刊A辑，1981, 2: 65-90

Exact Boundary Controllability for Second Order Quasilinear Hyperbolic Equations

ZHUANG Kai-li, SHANG Pei-pei

(School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433)

Abstract: Based on the theory of the semi-global C^2 solution to the mixed initial-boundary value problem for second order quasilinear hyperbolic systems, different boundary conditions are proposed for general second order quasilinear hyperbolic equations according to the distribution of the eigenvalues in a neighbourhood of the equilibrium states. The local exact boundary controllability is established by direct method for second order quasilinear hyperbolic equations with nonzero eigenvalues; for second order quasilinear hyperbolic equations with zero eigenvalues, the local exact boundary controllability is established for specific equations. Some sharp estimates on the exact controllability time are also obtained.

Keywords: second order quasilinear hyperbolic equations; mixed initial-boundary value problem; semi-global C^2 solution; exact boundary controllability